Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 707380 03 novembre 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	a
2	c
3	a
4	c
5	d
6	b
7	b
8	a
9	c
10	b
11	d
12	c

1. La derivata della funzione $f(x) = (\sin x)^{\sin^2 x}$ è

► (a) $(\sin x)^{\sin^2 x} \cos x \sin x \,(2\log(\sin x) + 1)$

(b) $(\sin x)^{(\sin^2 x)-1} \log(\sin x)$

(c) $(\sin x)^{\sin^2 x} \cos x$

(d) $(\cos x)^{2 \sin x \cos x}$

Soluzione:

$$f(x) = (\sin x)^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x \cdot \log(\sin x)}$$

$$f' = e^{\sin^2 x \log(\sin x)} \cdot \left(2 \sin x \cos x \cdot \log(\sin x) + \sin^{\cancel{2}} x \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}} \cdot \cos x\right) =$$

$$= (\sin x)^{\sin^2 x} \sin x \cos x \,(2 \log(\sin x) + 1)$$

2. La funzione $f : (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{1-e^x}$

(a) è iniettiva ma non surgettiva

(b) è bigettiva

► (c) è surgettiva ma non iniettiva

(d) non è né iniettiva né surgettiva

Soluzione:

$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \dfrac{\log(x^2)}{1-e^x}$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{\log(0^+)}{1-1^-} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\log(+\infty)}{1-e^{-\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

Osserviamo che f è continua e che $\sup\limits_{(-\infty,0)}(f) = +\infty$

$\inf\limits_{(-\infty,0)}(f) = -\infty$, quindi per il teorema dei valori intermedi

f è surgettiva.

Dato che f assume tutti i valori di $\mathbb{R}$ nell'intervallo

$(-\infty, 0)$, i valori che assume in $(0, +\infty)$ saranno

assunti almeno 2 volte, cioè

$\forall\ x > 0 \quad \exists\ x_1 < 0$ t.c. $f(x_1) = f(x)$

quindi f non è iniettiva.

3. Una primitiva della funzione $f(x) = e^{1-2\,x}$ è $F(x) =$

► (a) $-\dfrac{e}{2\,e^{2\,x}}$

(b) $-2\,e^{1-2\,x}$

(c) $\dfrac{e^{1-2\,x}}{2}$

(d) $e^{1-2\,x}$

Soluzione:

$$\int e^{1-2x}\,dx = \qquad 1-2x=t \qquad 2x=1-t \qquad x=\frac{1-t}{2} \qquad dx=-\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \int e^{t}\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int e^{t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{t}+c = -\frac{1}{2}e^{1-2x}+c =$$

$$= -\frac{e}{2e^{2x}}+c$$

Scegliendo $c=0$ otteniamo che $F(x) = -\frac{e}{2e^{2x}}$

è una primitiva di $f(x)=e^{1-2x}$.

4. $\int_1^2 x(\log x)^2\,dx =$

(a) $2(\log 2)^2 - 2\log 2$ (b) $1 + 2(\log 2)^2 - 2\log 2$ ▶ (c) $\frac{3}{4} + 2(\log 2)^2 - 2\log 2$ (d) $2(\log 2)^2$

Soluzione:

Calcoliamo prima una primitiva. Integriamo per parti derivando $(\log x)^2$ e integrando x:

$$\int x(\log x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \int x\log x\,dx$$

eseguiamo ora l'ultimo integrale nuovamente per parti derivando $\log x$ e integrando x:

$$\int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c =$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + c\,.$$

Quindi

$$\int x(\log x)^2\,dx = \frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c$$

Dal teorema di Torricelli otteniamo

$$\int_1^2 x(\log x)^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2}(\log 2)^2 - \frac{4}{2}\log 2 + \frac{4}{4} - \left(\cancel{\frac{1}{2}(\log 1)^2} - \cancel{\frac{1}{2}\log 1} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 2(\log 2)^2 - 2\log 2 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + 2(\log 2)^2 - 2\log 2\,.$$

5. $\int_0^{+\infty} (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)dx$

(a) non esiste (b) diverge positivamente (c) diverge negativamente ▶ (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right) dx.$$

Poniamo $f(x) = (\cos\sqrt{x})\left(\sin\frac{1}{x^3}\right)$ e osserviamo che f non è definita per $x=0$. Dividiamo l'intervallo di integrazione e consideriamo $\int_0^1 f(x)\,dx$. La f è di segno variabile e risulta

$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in (0,1]$, quindi, per il criterio del confronto e dell'assoluta integrabilità, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Per $x \geq 1$ avremo che

$$|f(x)| \leq \left|\sin\frac{1}{x^3}\right| = \sin\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^6}\right) = \frac{1}{x^3}\left(1+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right).$$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^3}$ e ricordando che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^3}\,dx$ converge.

Dal criterio del confronto avremo che $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, quindi, dal criterio di assoluta integrabilità, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^2(\log(1+x)-x)}\,dx$

(a) diverge positivamente ▶ (b) diverge negativamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^2(\log(1+x)-x)}\,dx \quad . \quad \text{Poniamo } f(x)=\frac{x-\sin x}{x^2(\log(1+x)-x)}$$

Esaminiamo l'andamento di f in un intorno di $x=0$.

Per $x\to 0$
$$f(x)=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)}{x^2\left(\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\cancel{-x}\right)}=\frac{\cancel{x}\cancel{-x}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x^4\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}=$$

$$=\frac{x^3\left(\frac{1}{6}+o(x)\right)}{x^4\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}=\frac{1}{x}\,\frac{\frac{1}{6}+o(x)}{-\frac{1}{2}+o(1)}$$

Poniamo $g(x)=\frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cancel{x}}\,\frac{\frac{1}{6}+o(x)}{-\frac{1}{2}+o(1)}\cdot\cancel{x}=-\frac{1}{3}.$$

Ne segue che $f(x)<0$ in un intorno destro di 0. Possiamo quindi applicare il criterio del confronto asintotico e ottenere che

$$\int_0^1 f(x)\,dx=-\infty \quad , \text{dato che } \int_0^1 g(x)\,dx=+\infty.$$

Sull'intervallo $[1,+\infty)$ potremmo verificare che $f(x)\le 0$, ma invece useremo la convergenza assoluta, senza preoccuparci del segno di f.

$$|f(x)|=\frac{|x-\sin x|}{x^2\,|\log(1+x)-x|} \quad . \quad \text{Scegliamo } g(x)=\frac{1}{x^2} \text{ e osserviamo che}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x-\sin x|}{\cancel{x^2}\,|\log(1+x)-x|}\cdot\cancel{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left|1-\overset{\to 0}{\frac{\sin x}{x}}\right|}{\cancel{x}\left|\underset{\to 0}{\frac{\log(1+x)}{x}}-1\right|}=1$$

Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, anche $\int_1^{+\infty}|f(x)|\,dx$ converge.

Dal criterio dell'assoluta convergenza otteniamo allora che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$.

Per completezza, dobbiamo verificare che la funzione $f(x)$ sia definita in ogni punto dell'intervallo $(0,+\infty)$ (per escludere la presenza di asintoti verticali).

Il denominatore di f deve essere $\neq 0$, quindi basta verificare che $\log(1+x) - x \neq 0 \quad \forall\, x > 0$. Poniamo $h(x) = \log(1+x) - x$ e osserviamo che $h(0) = 0$. Calcoliamo $h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$. Abbiamo che $\frac{1}{1+x} - 1 < 0 \iff \frac{1-(1+x)}{1+x} < 0 \iff \frac{-x}{1+x} < 0$ sempre vera $\forall\, x > 0$. Ne segue che $h(x)$ è strettamente decrescente in $[0,+\infty)$, quindi $h(x) < 0 \quad \forall\, x \in (0,+\infty)$ (dato che $h(0) = 0$). Questo ci assicura che il denominatore di f non si annulla mai in $(0,+\infty)$.

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right) - e^{\frac{1}{n}} + 1} =$

(a) $-\frac{3}{2}$ ▶ (b) -3 (c) $+\infty$ (d) 0

Soluzione:

$$a_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n}}{\sin\left(\frac{2}{n}\right) - e^{1/n} + 1} = \frac{\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3}{n}}{\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1}$$

$$= \frac{-\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n} \cancel{-1} - \frac{1}{n} \cancel{+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{-\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{-3 + o(1)}{1 + o(1)} \to -3$$

per $n \to +\infty$.

8. La successione $a_n = \frac{1}{n}(\sin^2(e^n)+1)\cos\frac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

► (a) ha massimo

(b) non è limitata superiormente

(c) non ha limite

(d) ha minimo

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin^2(e^n)+1\right)\cos\frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty}\left(\text{limitata}+1\right)\cdot\cos\frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0\cdot\text{limitata}\cdot\cos 0 = 0\cdot\text{limitata}\cdot 1 = 0$$

Dato che $\sin^2(e^n) \geq 0$, $\cos\frac{1}{n} > 0$ $\forall n \geq 1$ otteniamo che $a_n > 0$ $\forall n \geq 1$ quindi, per la versione per successioni del teorema di Weierstrass generalizzato, (a_n) ha massimo.

9. La serie $\sum_{n\geq 1} n^{\left((\cos\frac{2}{n})-1\right)n^2}$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente

(b) diverge positivamente

► (c) converge assolutamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

La serie è a termini positivi.

Per $n\to\infty$ $\quad \left(\cos\frac{2}{n}-1\right)n^2 = \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1\right)n^2 =$

$$= \left(-\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)n^2 = -2+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Poniamo $a_n = n^{\left((\cos\frac{2}{n})-1\right)n^2}$ e scegliamo $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{-2+o(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n^2}} = n^{-2+o(\frac{1}{n})}\cdot n^2 = n^{o(\frac{1}{n})} = e^{o(\frac{1}{n})\cdot\log n} \to e^0 = 1$$

per $n\to\infty$

Dato che $\sum b_n$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche $\sum a_n$ converge. Dato che $a_n > 0$ $\forall n \geq 1$ $\sum a_n$ converge anche assolutamente.

10. La serie $\sum_n \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}$

(a) converge semplicemente ma non assolutamente ► (b) converge assolutamente

(c) diverge a $-\infty$ (d) è indeterminata

Soluzione:

$$a_n = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}.$$

La serie è a segno variabile, proviamo la convergenza assoluta.

$$|a_n| = \frac{\left|\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{-3n}\log^3 n}{2n+1} \leq \frac{e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}$$

Usiamo ora il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{\frac{e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}} = \frac{e^{-3}\sqrt[n]{\log^3 n}}{\sqrt[n]{2n+1}} \rightarrow \frac{e^{-3}\cdot 1}{1} = \frac{1}{e^3} < 1$$

quindi la serie $\sum_n \frac{e^{-3n}\log^3 n}{2n+1}$ converge.

Per il criterio del confronto $\sum_n |a_n|$ converge

quindi la serie converge assolutamente.

11. L'insieme dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2y^2(y+x-1)$ è costituito da

(a) una retta (b) due punti (c) l'insieme vuoto ► (d) due rette e un punto

Soluzione:

$f(x,y) = x^2y^2(y+x-1)$

$f_x = y^2\left(2x(y+x-1)+x^2\right) = y^2x\left(2(y+x-1)+x\right) = y^2x(3x+2y-2)$

$f_y = x^2\left(2y(y+x-1)+y^2\right) = x^2y\left(2(y+x-1)+y\right) = x^2y\ (2x+3y-2)$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} y^2x(3x+2y-2) = 0 \\ x^2y(2x+3y-2) = 0 \end{cases}$.

La prima equazione ha come soluzioni $y=0 \vee x=0 \vee 3x+2y-2=0$.

Se $y=0$ anche la seconda equazione è risolta, quindi la retta $y=0$ è una retta di punti stazionari.

Lo stesso succede alla retta $x=0$.

Se $3x+2y-2=0$ allora $2y = 2-3x \iff y = \frac{2-3x}{2}$.

Possiamo dividere la seconda equazione per x^2y perché i casi $x=0$ oppure $y=0$ sono già stati considerati. Quindi resta $2x+3y-2=0$.

Sostituiamo la y ottenuta dalla prima equazione ottenendo:

$2x+3\,\frac{2-3x}{2}-2=0 \iff 4x+6-9x-4=0 \iff 2=5x \iff x=\frac{2}{5}$.

Sostituendo nell'equazione $y=\frac{2-3x}{2}$ abbiamo $y = \frac{2-3\cdot\frac{2}{5}}{2} = \frac{2-\frac{6}{5}}{2} =$

$= \frac{2}{5}$. Quindi $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ è punto stazionario.

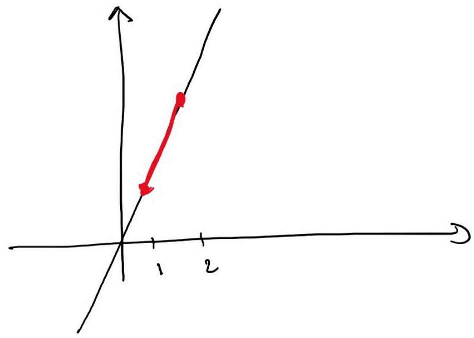
L'insieme dei punti stazionari è formato da due rette e un punto.

12. Il minimo della funzione $f(x,y) = e^{\frac{x^4+y^2}{x^2y}}$ sul dominio $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x, 1 \le x \le 2\right\}$ vale

(a) $e^{\frac{3}{\sqrt{2}}}$ (b) $\frac{1}{e}$ ► (c) e^2 (d) $e^{\frac{5}{2}}$

Soluzione:

Il dominio Ω è un segmento di retta, estremi inclusi che è un insieme limitato e chiuso.



f è continua, quindi ha max e min su Ω.

Possiamo parametrizzare Ω in questo modo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

e considerare f composta con la parametrizzazione

$$g(t) = f(t, 2t) = e^{\frac{t^4+4t^2}{t^2 \cdot 2t}} = e^{\frac{t^2(t^2+4)}{2t^3}} = e^{\frac{t^2+4}{2t}}$$

$$g'(t) = e^{\frac{t^2+4}{2t}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot t - (t^2+4)}{t^2} = \frac{e^{\frac{t^2+4}{2t}}}{2} \cdot \frac{2t^2 - t^2 - 4}{t^2} =$$

$$= \frac{e^{\frac{t^2+4}{2t}}}{2} \quad \frac{t^2-4}{t^2}$$

$$g'(t) \geq 0 \iff t^2 - 4 \geq 0 \iff t \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

ne segue che nell'intervallo $1 \leq t \leq 2$, $g'(t) \leq 0$.

La funzione g è quindi decrescente e $\max(g) = g(1) = e^{\frac{5}{2}}$

$$\min(g) = g(2) = e^{\frac{8}{4}} = e^{2}$$